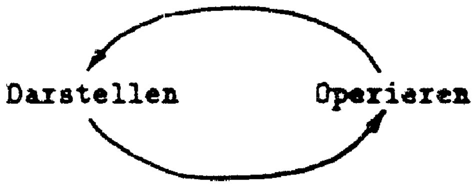
Neue Wege zum Buchstabenrechnen

Günther Malle, Universität Klagenfurt

1. Darstellen und Operieren

Der jetzige österreichische Unterstufenlehrplan sieht die Einführung und Behandlung von Variablen bereits ab der 1. Klasse (insgesamt also ab dem 5. Schuljahr) vor. Dahinter stehen gewisse Reformabsichten, von denen hier einige erläutert werden sollen.

Eine Grundidee sei dabei ganz besonders hervorgehoben: In der Mathematik gibt es zwei Grundtätigkeiten, die in einem ständigen Wechselspiel miteinander stehen, nämlich Darstellen und Operieren.



Man kann dies beispielsweise am Lösen einer Gleichung sehen. Die Gleichung selbst ist eine Darstellung eines Sachverhaltes, auf diese Darstellung können Operationen angewandt werden, die zu einer neuen Gleichungsdarstellung führen, auf die wiederum Operationen angewandt werden können usw.

Im traditionellen Unterricht der elementaren Algebra dominiert nun ganz eindeutig das Operieren mit Variablen (Termumformen, Gleichungslösen). Ein Anliegen des Lehrplanes ist hingegen, auch dem Darstellen mit Variablen zu seinem Recht zu verhelfen. Damit ist ein *allgemeines Beschreiben von Sachverhalten mit Hilfe von Variablen* gemeint, insbesondere das *Aufstellen (und Interpretieren) von Formeln*. Dies soll sogar in den ersten beiden Klassen den Schwerpunkt der elementaren Algebra bilden. Einfache Umformungen von Termen oder Formeln sollen jedoch nicht ausgeschlossen bleiben, wenn sie sich im Rahmen der betreffenden Beispiele sinnvoll ergeben. Das folgende Beispiel soll näher erläutern, was damit gemeint ist.

2. Ein Beispiel zum Aufstellen, Interpretieren und Umformen von Formeln in der 1. Klasse

Der Fahrpreis für eine Fahrt mit einem Eurocity-Zug setzt sich zusammen aus dem Preis für die Fahrkarte und einem Eurocity-Zuschlag.

An diesen Text können sich unterschiedliche Aufgabenstellungen anschließen, die zu unterschiedlichen Schülertätigkeiten führen, z.B. zu den folgenden:

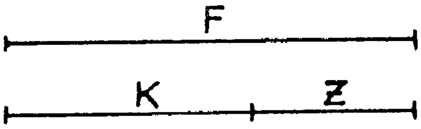
a) Numerische Vorüberlegungen

Ergänze nebenstehende Tabelle!

Fahrstrecke (in km)	Kartenpreis 2. Kl. (in S)	Zuschlag (in S)	Fahrpreis (in S)
50	77	20	
100	154	20	
...	...	...	

b) Allgemeines Beschreiben der Berechnungen

Stelle eine Formel für den Fahrpreis auf und stelle diese Formel durch Strecken dar!



$F = K + Z$

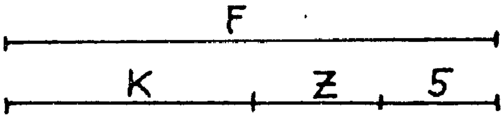
Andere Möglichkeiten: **FAHRPREIS = KARTE + ZUSCHLAG**,
Fpr = Kte + Zus , f = k+z usw.

c) Einsetzen von Zahlen

Berechne F mit Hilfe der vorhin aufgestellten Formel für K = 147 S und Z = 20 S!

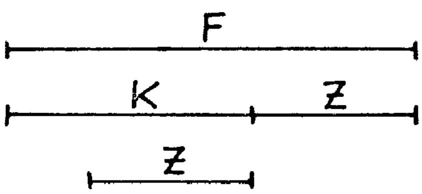
d) Variieren der Formel

Ein Reisebüro berechnet zusätzlich zum Kartenpreis und Zuschlag noch 5 S Bearbeitungsgebühr. Wie lautet jetzt die Formel für den Fahrpreis?



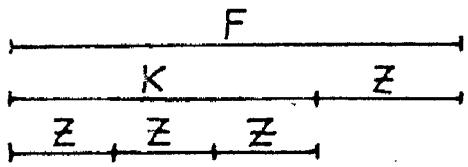
$F = K + Z + 5$

Normalerweise ist der Kartenpreis größer als der Zuschlag. Drücke dies mit Hilfe der Variablen K und Z aus! Was läßt sich über den Fahrpreis sagen?



$K > Z\,, \quad F > 2 \cdot Z$

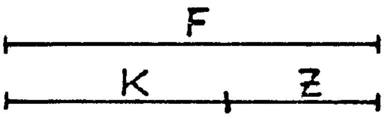
Was ist, wenn der Kartenpreis zufällig dreimal so groß ist wie der Zuschlag?



$K = 3 \cdot Z$, $F = 4 \cdot Z$

e) Elementares Gleichungsumformen ohne Regeln

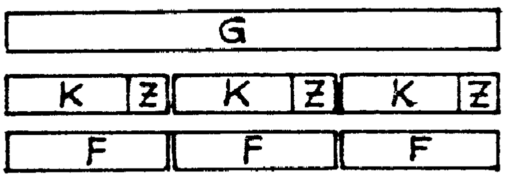
Wie kann man aus zwei der Größen F, K, Z die dritte berechnen?



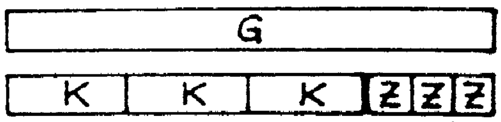
$F = K + Z$, $K = F - Z$, $Z = F - K$

f) Termumformen ohne Regeln

Wie groß ist der Gesamtpreis G, wenn 3 Personen fahren?



oder



$$G = 3 \cdot F = 3 \cdot (K + Z) = 3 \cdot K + 3 \cdot Z$$

Und wenn n Personen fahren?

$$G = n \cdot F = n \cdot (K + Z) = n \cdot K + n \cdot Z$$

g) Interpretieren einer Formel

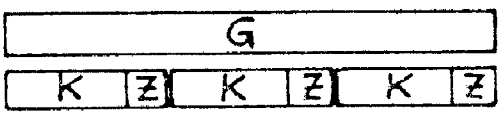
Was könnte die folgende Formel bedeuten?

$$G = 2 \cdot K + 3 \cdot (K + Z)$$

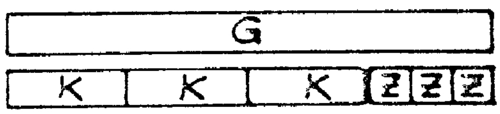
Mögliche Antwort: Dies ist der Gesamtpreis für 5 Personen, von denen zwei keinen Zuschlag bezahlt haben (oder bezahlen müssen).

h) Komplizierteres Gleichungsumformen ohne Regeln

Drei Personen fahren. Wie kann man aus dem Gesamtpreis G den Kartenpreis K für eine Person berechnen?



oder



$G = 3 \cdot (K + Z)$
$K + Z = G : 3$
$K = (G : 3) - Z$

$G = 3 \cdot K + 3 \cdot Z$
$3 \cdot K = G - 3 \cdot Z$
$K = (G - 3 \cdot Z) : 3$

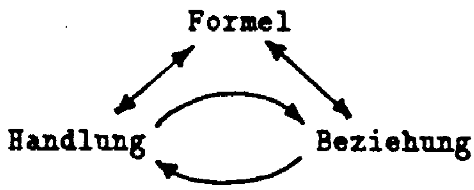
Bei Aufgaben dieser Art beachte man folgende Punkte:

a) Es ist nicht nötig, näher zu erklären, was Variable sind. Insbesondere ist es nicht nötig, zu erklären, daß eine Variable ein Platzhalter ist, für den man Zahlen aus einer bestimmten Grundmenge einsetzen darf, wodurch gewisse Aussageformen in wahre oder falsche Aussagen übergehen. Man kann sich an den Grundsatz halten: *Nicht lange über Variable reden, sondern sie einfach gebrauchen!*

b) Es ist nicht nötig, für die vorkommenden einfachen Umformungen Regeln anzugeben. Die Umformungen sind entweder selbstverständlich oder können inhaltlich begründet werden. Betrachten wir als Beispiel die Umformung von $F = K + Z$ zu $K = F - Z$. Eine inhaltliche Begründung dieser Umformung kann im wesentlichen auf drei Arten erfolgen: durch *Handlungsvorstellungen in der zugrundeliegenden Sachsituation* (Fahrkartenschalter), durch eine *schematische Visualisierung* (Streckendarstellung, Rechtecksdarstellung o.ä.) oder durch *Rückgriff auf das Zahlenrechnen* (wenn $10 = 8 + 2$ ist, dann ist $8 = 10 - 2$).

c) Ein gesondertes Üben von Umformungstechniken ist in den ersten beiden Jahren der Unterstufe gänzlich überflüssig. Auf jeden Fall sollte vermieden werden, daß das Umformen zu einem *sinnlosen Selbstzweck* entartet.

d) Eine Formel wie etwa $F = K + Z$ hat eine Doppelnatur. Sie gibt einerseits eine Handlung (Rechenhandlung) wieder: Man erhält F, indem man K und Z addiert. Andererseits gibt sie auch eine Beziehung zwischen Größen wieder: F ist die Summe von K und Z. Diese beiden Aspekte einer Formel hängen miteinander in komplementärer Weise zusammen, d.h. der eine Aspekt setzt den jeweils anderen voraus. Um ein einseitiges Formelverständnis zu vermeiden, sollten also im Unterricht beide Aspekte betont werden, etwa durch geeignete Variation der Aufgabentexte oder der sprachlichen Interpretationen von Formeln.



3. Erarbeiten von Regeln zum Gleichungsumformen

Bei einem bloß inhaltlich begründeten Umformen ohne Regeln kann man in der Schulmathematik nicht stehen bleiben. Denn ein Wesenszug der Mathematik, der auch in der Schule vermittelt werden soll, ist ja gerade der, daß man nicht jeden Schritt inhaltlich begründen muß, sondern daß man gewisse Schritte formal, unter Berufung auf gewisse Regeln, begründen kann.

Um elementare Gleichungen zu lösen, braucht man zwei Arten von Regeln, Gleichungsumformungsregeln und Termumformungsregeln. Aus Platzgründen kann ich hier nur auf die ersteren eingehen.

Über den Zeitpunkt der "offiziellen" Einführung von Gleichungsumformungsregeln kann schwer eine allgemeine Empfehlung abgegeben werden. In den ersten beiden Unterstufenklassen sind solche Regeln nicht unbedingt nötig. Sie können jedoch eingeführt werden, wenn Schüler von sich aus ein Bedürfnis nach solchen Regeln äußern bzw. diese vielleicht von sich aus formulieren. Jedenfalls sollte man ihnen derartige Regeln nicht als Zwangsjacke umhängen. Neben regelhaftem Umformen sollte zumindest eine Zeitlang auch inhaltlich begründetes Umformen zugelassen werden, ein abrupter Übergang wäre hier schädlich.

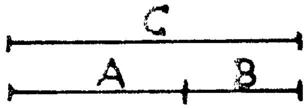
Welche Regeln soll man nun formulieren und wie kann man zu ihnen kommen?

Einen möglichen Ansatz zur Erarbeitung von Regeln bilden Umkehraufgaben, in denen eine Formel aufgestellt wird, aus der eine bestimmte Größe ausgerechnet werden soll. Solche Beispiele kommen ja immer wieder vor und können einmal zusammengestellt werden, z.B.:

$K + Z = F$	$\Longleftrightarrow$	$K = F - Z$	(K = Kartenpreis, Z = Zuschlag, F = Fahrpreis)
$n + t = b$	$\Longleftrightarrow$	$n = b - t$	(n = Nettogewicht, t = Taragewicht, b = Bruttogewicht)
. . . .	. . . . .	. . . . . .	
$a \cdot b = A$	$\Longleftrightarrow$	$a = A : b$	(a,b = Seitenlängen eines Rechtecks, A = Flächeninhalt)
$n \cdot p = G$	$\Longleftrightarrow$	$n = G : p$	(n = Stückzahl, p = Stückpreis, G = Gesamtpreis)
. . . .	. . . . .	. . . . . .	

Falls das Doppelpfeilsymbol noch nicht bekannt ist, würde ich es hier einführen. Diese Äquivalenzen sind mit sog. kontextabhängigen Variablen formuliert, d.h. mit Variablen, die nur in einem bestimmten Kontext gedeutet werden können. Man kann jedoch leicht bemerken, daß es sich bei diesen Beispielen eigentlich "immer um dasselbe" handelt und die dahinterstehenden Regeln mit kontextfreien Variablen formulieren, d.h. mit Variablen, die nicht mehr an einen bestimmten Kontext gebunden sind. Dazu bieten sich Großbuchstaben an. Auf diese Weise erhält man Regeln, die als Elementarumformungsregeln bezeichnet werden:

Additive Elementarumformung $\quad A + B = C \Longleftrightarrow A = C - B$



Multiplikative Elementarumformung $\quad A \cdot B = C \Longleftrightarrow A = C : B$

In der Praxis ist es zweckmäßig, die Elementarumformungsregeln in verschiedenen Varianten zu verwenden (z.B. $A = B + C \Longleftrightarrow A - B = C$), es ist jedoch nicht nötig, alle diese Varianten explizit zu formulieren, da sie selbstverständlich sind — wie ja überhaupt die Elementarumformungsregeln etwas ganz Selbstverständliches ausdrücken, nämlich den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion bzw. Multiplikation und Division.

Diese Regeln können später ergänzt werden durch die sog. Waageregeln:

$$A = B \Longleftrightarrow A \pm C = B \pm C$$

$$A = B \Longleftrightarrow A \cdot/: C = B \cdot/: C$$

4. Bewußtes Anwenden von Regeln zum Gleichungsumformen

Es genügt natürlich nicht, die Elementarumformungsregeln bloß zu formulieren. Die Schüler müssen auch lernen, sie richtig anzuwenden. Hier empfehle ich die Strategie: *Zuerst spielerisches, dann zielgerichtetes Umformen.*

Mit spielerischem Umformen ist gemeint, daß Schüler zunächst nur irgendwelche Umformungen einer Formel angeben und nicht unbedingt zielgerichtet eine bestimmte Größe aus der Formel ausrechnen sollen. Dies bringt den Vorteil mit sich, daß sie sich zunächst auf eine korrekte Regelanwendung konzentrieren können und sich nicht mit der Frage belasten müssen, ob die vorgenommene Umformung in Hinblick auf ein bestimmtes Ziel, nämlich die Isolation der gesuchten Größe auf einer Seite, auch zweckmäßig ist. Ein Beispiel:

> *Forme die Formel $a + b + c = d + e$ auf mehrere Arten um und gib jeweils die verwendete Regel an! Wer am meisten Umformungen angeben kann, hat gewonnen.*

Eine Möglichkeit, diese Formel umzuformen, sieht so aus:

$$\underbrace{\boxed{a+b}}_{A} + \underbrace{\boxed{c}}_{B} = \underbrace{\boxed{d+e}}_{C} \Longleftrightarrow \underbrace{\boxed{a+b}}_{A} = \underbrace{\boxed{d+e}}_{C} - \underbrace{\boxed{c}}_{B}$$

Dabei wird die additive Elementarumformungsregel verwendet. Durch Kästchen wird sichtbar gemacht, welche Teilterme der Formel dem A,B bzw. C der Regel entsprechen. Hier wird eine Schwierigkeit sichtbar, die ein Schüler bewältigen muß: er muß erkennen, daß man für die Variablen A,B,C der Regel nicht nur einzelne Zahlen oder Buchstaben einsetzen darf, sondern auch komplexere Teilterme.

Das zielgerichtete Umformen kann anschließend an Aufgaben der folgenden Art behandelt werden.

> *Der Flächeninhalt eines Trapezes ist $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$. Drücke c durch die übrigen Größen der Formel aus! Gib bei jedem Umformungsschritt die verwendete Regel an!*

Eine mögliche Lösung sieht so aus:

$$\underset{A}{\boxed{A}} = \underset{B}{\boxed{\tfrac{a+c}{2}}} \cdot \underset{C}{\boxed{h}} \qquad A = B \cdot C \iff \frac{A}{C} = B$$

$$\underset{A}{\boxed{\tfrac{A}{h}}} = \frac{\overset{B}{\boxed{a+c}}}{\underset{C}{\boxed{2}}} \qquad A = \frac{B}{C} \iff C \cdot A = B$$

$$\underset{A}{\boxed{2 \cdot \tfrac{A}{h}}} = \underset{B}{\boxed{a}} + \underset{C}{\boxed{c}} \qquad A = B + C \iff A - B = C$$

$$2 \cdot \frac{A}{h} - a = c$$

Die Verwendung von Buchstaben zur Formulierung von Regeln und die Verwendung von Kästchen zu ihrer Anwendung kann helfen, Schülerfehler zu vermeiden. Man könnte die Elementarumformungsregeln statt mit Buchstaben auch verbal formulieren, etwa: "Man kann ein Glied auf die andere Seite bringen, nur muß man die jeweilige Rechenoperation durch ihre inverse ersetzen." Wenn ein Schüler jedoch nicht mehr weiß als dieses, darf man sich nicht wundern, wenn er rechnet:

$$a = \frac{b}{cd + e}$$

$$a - e = \frac{b}{cd}$$

Er hat ja genau das getan, was die Regel besagt. Bloß verbal formulierte Regeln sind also zu ungenau und müssen präzisiert werden, wozu sich Buchstaben am besten eignen. Hätte der betreffende Schüler besser gelernt, mit Buchstaben und Kästchen umzugehen, hätte ihm eigentlich auffallen müssen, daß er eine Umformung vornimmt, die durch keine Regel gedeckt ist:

$$\boxed{a} = \frac{\boxed{b}}{\boxed{\boxed{cd} + \boxed{e}}}$$

?

Dem Lehrer wird durch diese Methode übrigens ein effizientes Mittel in die Hand gegeben, Schüler auf Fehler aufmerksam zu machen und ihnen zu erklären, warum ihr Vorgehen falsch ist (was sonst bekanntlich nicht immer leicht ist).

So kurz diese Ausführungen auch sind, sie zeigen die wichtige Rolle des Erkennens von Termstrukturen. Der Schüler muß ***sehen lernen***, was in einer konkreten Gleichung dem A,B bzw. C entspricht und das setzt voraus, daß er die möglichen Strukturen der Terme auf den beiden Seiten der Gleichung erkennen kann. Diesem Erkennen von Termstrukturen wird im traditionellen Mathematikunterricht wenig Augenmerk zugewendet. Jedoch scheint gerade hier ein "Angelpunkt" zur Verbesserung der Fähigkeit von Schülern im Umformen von Termen und Gleichungen zu liegen. Es wird u.a. nötig sein, ***neue Aufgabentypen*** zu entwickeln, in denen Einzeltätigkeiten geübt werden, die beim Umformen oder auch anderen mathematischen Aktivitäten eine Rolle spielen, wie z.B.: zu einem vorgegebenen Term verschiedene Strukturen angeben, einen vorgegebenen Term unter einer vorgegebenen Struktur sehen, einen vorgegebenen Term auf eine vorgegebene Struktur bringen, gemeinsame Strukturen von Termen angeben, Terme auf gemeinsame Struktur bringen, usw.

Literatur

FISCHER, R. / MALLE, G. (1985): **Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.** BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich.

MALLE, G. (1986a; Hrsg.): Buchstabenrechnen. "mathematik lehren", Heft 15. Erhard Friedrich-Verlag, Postfach 100150, D-3016 Seelze 6.

MALLE, G. (1986b): Schülerfehler beim Buchstabenrechnen. Skriptum, Universität Klagenfurt.